9º ano

#dia3

Semana 14

CONQUISTA
SOLUÇÃO EDUCACIONAL

Querida Família

Estamos passando por um momento delicado, o qual envolve a saúde de todos, sem exceção.

Por isso, a contribuição de cada um é muito importante para que voltemos às nossas atividades normais na escola.

Tendo em vista que os estudantes ficarão em casa por um certo tempo, elaboramos algumas sugestões para inspirá-los na nova rotina.

Entendemos que manter uma rotina criativa ajudará, e muito, no retorno das atividades em sala de aula posteriormente.

Vamos juntos embarcar nessa aventura?

CONQUISTA
SOLUÇÃO EDUCACIONAL

Olá! Continuando nossos estudos sobre equação do 2º grau, hoje veremos como resolver uma equação completa do 2º grau. O conteúdo encontra-se no capítulo 6 do volume 2, nas páginas de 81 a 90. Vamos lá!

Para se mexer

Resolver uma equação de segundo grau significa buscar valores reais de x que tornam a equação verdadeira. Esses valores são denominados raízes da equação.

Este é um conteúdo muito importante e inerente ao 9º ano do ensino fundamental que envolve equações do 2º grau e as suas formas de resolução. As equações do 2º grau podem ser resolvidas de forma prática por meio da utilização da equação de Bhaskara.

Como vimos, uma equação do 2º grau é uma equação que possui o formato:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in R \text{ e } a \neq 0.$$

Numa equação **do 2º grau**, o x é a incógnita e representa um valor desconhecido. Já as letras a, b e c são chamadas de coeficientes da equação.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Os coeficientes de uma equação do segundo grau, a, b, e c, são números que pertencem ao conjunto dos números reais (R).
- O coeficiente c não é acompanhado pela incógnita x.
- O coeficiente b é o coeficiente que acompanha x.
- O coeficiente a é o valor numérico que acompanha o termo x^2.

Numa **equação do 2º grau**, o **x** é a incógnita e representa um valor desconhecido. Já as letras **a**, **b** e **c** são chamadas de coeficientes da equação.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Os **coeficientes** de uma equação do segundo grau, a, b, e c, são números que pertencem ao conjunto dos números reais (R).
- O coeficiente c não é acompanhado pela incógnita x. Logo, ele é chamado de **termo independente da equação do segundo grau**.
- O coeficiente b é o coeficiente que acompanha x e por essa razão, é conhecido como **coeficiente linear**.
- O coeficiente a, o intitulado **coeficiente quadrático**, é o valor numérico que acompanha o termo x^2.

Equações do 2º grau completas

As equações do 2º grau **completas** são aquelas que apresentam todos os coeficientes, ou seja, a, b e c são diferentes de zero ($a, b, c \neq 0$).

Por exemplo, a equação $5x^2 + 2x + 2 = 0$ é completa, pois todos os coeficientes são diferentes de zero ($a = 5$, $b = 2$ e $c = 2$).

Exemplos:

$3x^2 + 4x + 1 = 0$: é uma equação do segundo grau, com $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$.

$x^2 - x - 1 = 0$: é uma equação com grau 2, com $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$.

$9x^2 - 5x = 0$: também é uma equação de grau 2, com $a = 9$, $b = -5$, $c = 0$.

$5x^2 - 4 = 0$: equação do segundo grau, com $a = 5$, $b = 0$, $c = -4$.

O discriminante (Δ) e o número de raízes

As raízes reais de uma equação de 2º grau dependem do discriminante Δ.

- Se Δ for um número real positivo ou igual a zero, $\sqrt{\Delta}$ também será um número real positivo ou igual a zero. Portanto, a equação **terá raízes reais**.
- Se Δ for um número real negativo, $\sqrt{\Delta}$ não será um número real. Nesse caso, a equação não terá raízes reais.

De modo geral, observamos que na fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ para:

$$\Delta > 0 \begin{cases} x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \Rightarrow \text{a equação tem } \textbf{duas raízes diferentes}$$

$$\Delta = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{-b + \sqrt{0}}{2a} = \dfrac{-b + 0}{2a} = \dfrac{-b}{2a} \\ \qquad \text{ou} \\ = \dfrac{-b - \sqrt{0}}{2a} = \dfrac{-b - 0}{2a} = \dfrac{-b}{2a} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ a equação tem **duas raízes iguais**

(ou **uma raíz real**)

$\Delta > 0 \left\{ \sqrt{0} \right.$ $\Rightarrow$ não é um número real para valores negativos de Δ.

A equação **não possui raiz real**.

Exemplos

1. Quais as raízes da equação $x^2 + 5x - 6 = 0$?

Nessa equação, temos: $a = 1$, $b = 5$ e $c = -6$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$

$\Delta = 25 + 24$

$\Delta = 49$

$\Delta > 0 \rightarrow$ A equação tem duas raízes reais diferentes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$x' = \frac{-5 \pm 7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x'' = \frac{-5 - 7}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

As raízes da equação são: (–6, 1)

Veja:

Se substituirmos as raízes, veremos que elas realmente resolvem a equação.

$x^2 + 5x - 6 = 0$

$(-6)^2 + 5 \cdot (-6) - 6 = 0$

$36 - 30 - 6 = 0$

$36 - 36 = 0$

$0 = 0$

$1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 0$

$1 + 5 - 6 = 0$

$6 - 6 = 0$

$0 = 0$

Acompanhe este outro exemplo:

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

$a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$

$\Delta = 16 - 16$

$\Delta = 0 \rightarrow$ A equação tem uma única raiz real

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$

$$x = \frac{-4(-4)}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

As raiz da equação é $\frac{1}{2}$.

Outro exemplo: Encontre as raízes da equação: $2x^2 - 4x + 3 = 0$

$a = 2$, $b = -4$ e $c = 3$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$

$\Delta = 16 - 24$

$\Delta = -8$

$\Delta < 0 \rightarrow$ A equação não tem raízes reais.

Último exemplo

Como encontrar as raízes da equação $5x - 3x^2 = 4 - 2x$?

Primeiro reorganizamos a equação, deixando-a na forma geral.

$5x - 3x^2 = 4 - 2x$

$-3x^2 + 7x = 4$

$-3x^2 + 7x - 4 = 0$

$a = -3$

$b = 7$

$c = -4$

É HORA DE PRATICAR

Resolva as equações a seguir:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ R : (2, 3)

b) $x^2 - 8x + 12 = 0$ R : (2, 6)

c) $x^2 + 2x - 8 = 0$ R : (2, -4)

d) $x^2 - 5x + 8 = 0$ R : vazio

e) $2x^2 - 8x + 8 = 0$ R : 2

f) $x^2 - 4x - 5 = 0$ R : (–1, 5)

g) $-x^2 + x + 12 = 0$ R : (–3, 4)

h) $-x^2 + 6x - 5 = 0$ R : (1, 5)

RESPOSTAS

Resolva as equações a seguir:

a) R: (2, 3)

b) R: (2, 6)

c) R: (2, -4)

d) R: vazio

e) R: 2

f) R: (-1, 5)

g) R: (-3, 4)

h) R: (1, 5)

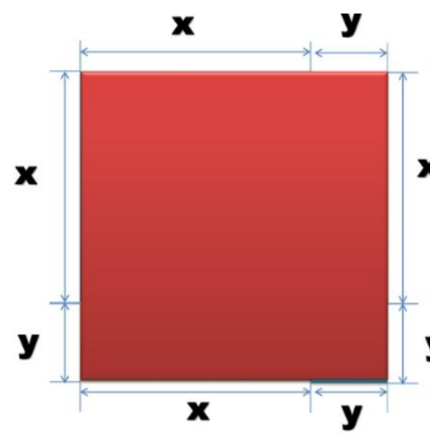
Para ir além

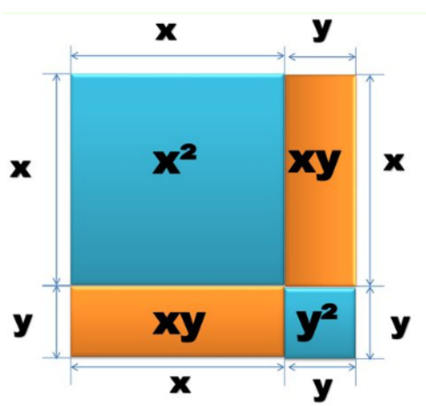
Você já se perguntou como as pessoas resolviam as equações do 2º grau antigamente quando não existia a famosa fórmula de Bhaskara?

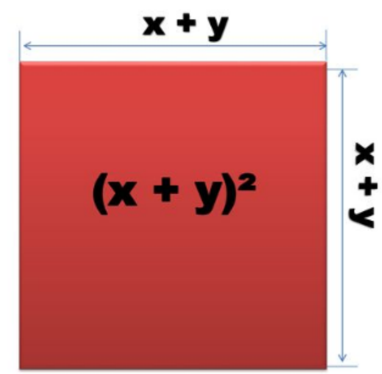
Uma dessas maneiras é conhecida como método de completar quadrados.

Se trata de uma expressão algébrica de dois termos que representa a área de um quadrado e de dois retângulos. O processo de completar quadrado encontra um terceiro termo que representa a área de um quadrado que, junto com os dois termos iniciais (quadrado e dois retângulos), forma um quadrado maior.

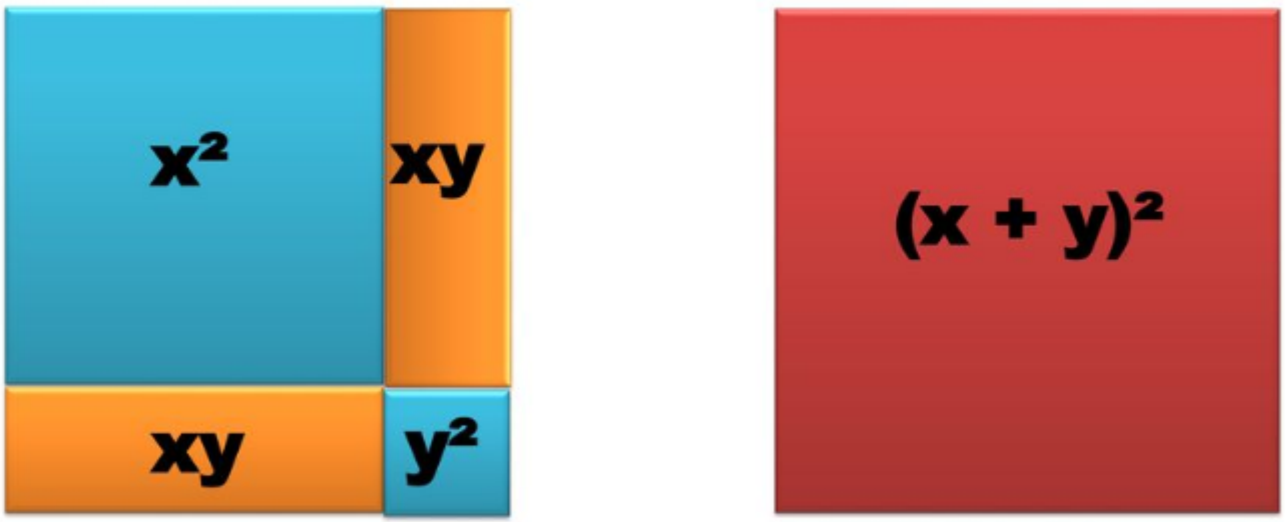
MÉTODO DE COMPLETAR QUADRADOS





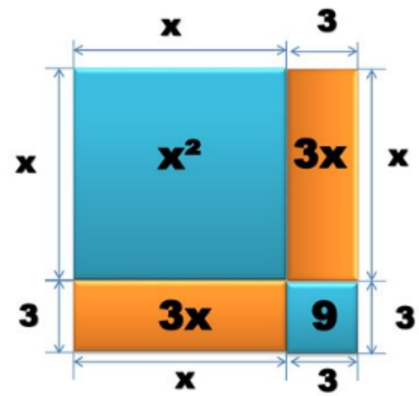


$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$



COMO FUNCIONA?

$X^2 + 6X + 9 = 0$



Esse método consiste em obter uma equação equivalente na qual o 1º membro seja um trinômio quadrado perfeito.

- Isolamos o termo independente de x no 2º membro

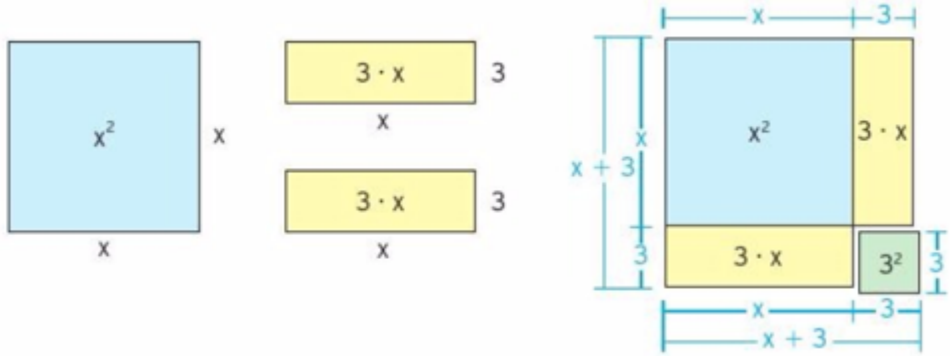
$$X^2 + 6X = -9$$

Note que o 1º membro não é um trinômio quadrado perfeito.

- X^2 é um dos quadrados perfeitos do trinômio obtido.
- O coeficiente de x é –6. Temos que: $-6 = -2 \cdot 3$

Então, o outro termo que é quadrado perfeito é 3^2.

- Acrescentamos 3^2 aos dois membros da equação.



$$X^2 - 6X + 3^2 = 16 + 3^2$$
$$(x - 3)^2 = 16 + 9$$
$$\mathbf{(x - 3)^2 = 25}$$

$(x - 3)^2 = 25$, daí temos:

$$(x-3) = \pm\sqrt{25} \begin{cases} x - 3 = +5 \rightarrow x = 5 + 3 \rightarrow x = 8 \\ x - 3 = -5 \rightarrow x = -5 + 3 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$S = \{-2, 8\}$

IMPORTANTE: nesse procedimento o coeficiente a deve ser igual a 1.

Quer ir mais além?

A mais famosa das equações não é a mais simples de ser assimilada. Aplicações divertidas podem ser um recurso eficiente nessa tarefa. Por exemplo: que tal aproveitar uma paquera entre seus alunos para ensinar uma equação do 2° grau que tem, como resultado, uma declaração de amor? Outros exemplos: Conseguirá o motorista maluco frear seu carro a tempo de não atropelar uma vaca? Quanto de lajota o senhor A. Pressado precisará comprar para fazer a moldura de sua piscina? Vamos resolver equações sem fazer nenhum cálculo? E mais: as descobertas de Galileu e Isaac Newton; a resolução de equações do 2° grau usando a geometria; uma viagem ao século V a.C. para conhecer o Partenon e o retângulo áureo são artifícios que ampliam o conhecimento e fixam a importância e os múltiplos empregos da mais popular das equações.