#ConquistaNoEstudo ▪ Etapa1

Ensino Médio ▪ 2ª Série

Matemática

Neste Guia, você vai estudar os Módulos 5 e 6

Profª. Carolina Pinotti

Função exponencial (páginas 5 a 9, Módulo 5)

Potenciação

Definição

Potenciação é uma multiplicação sucessiva, ou seja,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Ex. 1: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Ex. 2: $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

Decorrentes das propriedades

$$a^0 = 1, com\ a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propriedades

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, com\ b \neq 0$$

Atividade 1

(UECE - 2019) Qualquer número inteiro positivo pode ser expresso, de modo único, como soma de potências de 2. Exemplos: $63 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ (seis parcelas), $64 = 2^6$ (uma parcela), $68 = 2^2 + 2^6$ (duas parcelas). O número de parcelas na expressão de 2018 como soma de potências inteiras de 2 é:

a) 8
b) 10
c) 7
d) 9

Função exponencial (páginas 9 a 16, Módulo 5)

Equações exponenciais

1º modo

Transforma-se a equação em uma igualdade de potências de mesma base.

2º modo

Substituem-se as potências por uma incógnita auxiliar.
Determinam-se as raízes dessa equação.
Igualam-se as raízes à potência que foi substituída.
Resolve-se a equação exponencial do 1º modo.

Funções exponenciais

Função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$.

Ex. 1: $f(x) = 2^x$

Atividade 2

(UFPR – 2016) A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1\,000 \cdot 2^{0,0625t}$ fornece uma boa aproximação do valor V (em reais) em função do tempo t (em anos), desde o início da aplicação. Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará?

a) 8
b) 12
c) 16
d) 24
e) 32

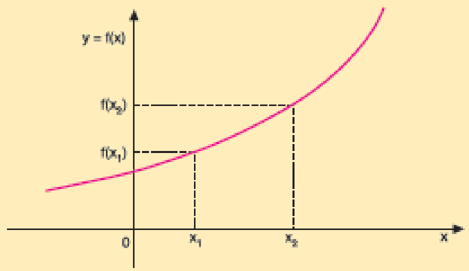
Função exponencial (páginas 17 a 23, Módulo 5)

Gráfico da função exponencial

$f(x) = a^x$

Em uma função exponencial $f(x) = a^x$:

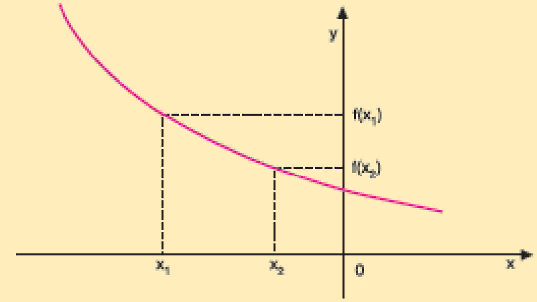
- se $a > 1$, a função é crescente;



A FUNÇÃO $f(x) = a^x$:
intersecta o eixo y sempre no 1;
não intersecta o eixo x;
Crescente, para:
- $a > 1$,

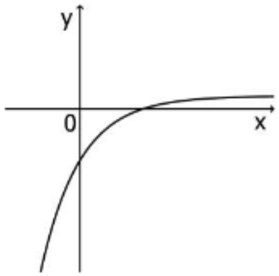
Decrescente, para:
- $0 < a < 1$

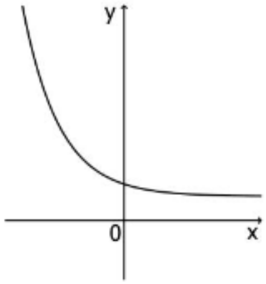
- se $0 < a < 1$, a função é decrescente;

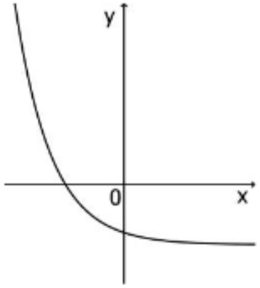


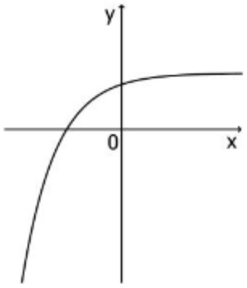
Atividade 3

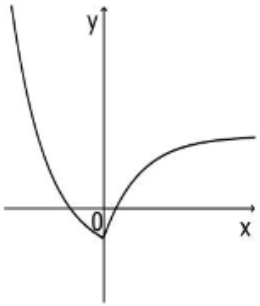
(UFRGS – 2016) Considere a função f definida por $f(x) = 1 - 5 \cdot 0{,}7^x$ e representada em um sistema de coordenadas cartesianas. Entre os gráficos abaixo, o que pode representar a função f é:











Função logarítmica (páginas 30 a 34, Módulo 5)

Logaritmo

Definição

$a^x = N \Leftrightarrow \log_a N = x$ (com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$)

Consequências:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$
- $a^{\log_a N} = N$


©Shutterstock/MTaira

Casa em meio a área alagada, após terremoto e tsunami no Japão

Atividade 4

Aplicando a definição de logaritmo, e a relação com a exponencial, encontre o valor dos logaritmos abaixo:

a) $\log_2 16$
b) $\log_5 125$
c) $\log 1\,000$
d) $\log_3 3\sqrt{3}$
e) $\log_4 0{,}25$

Função logarítmica (páginas 35 a 38, Módulo 5)

Logaritmo

Propriedades

Logaritmo do produto:

- $\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

Logaritmo do quociente:

- $\log_a(M:N) = \log_a M - \log_a N$

Logaritmo da potência

- $\log_a M^n = n \cdot \log_a M$

Mudança de base

Para N > 0, a > 0, a ≠ 1, k > 0 e k ≠ 1, temos:

$$\log_a N = \frac{\log_k N}{\log_k a}$$

Exemplos: ($\log_{10} 2 = 0{,}3$)

1) $\log_{10} 5 = \log_{10}\left(\frac{10}{2}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

2) $\log_5 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7} \cong 0{,}428$

Atividade 5

(UFRGS – 2014) Atribuindo para log 2 o valor 0,3, então os valores de log 0,2 e log 20 são, respectivamente:

a) –0,7 e 3

b) –0,7 e 1,3

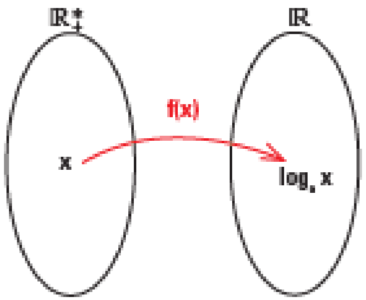
c) 0,3 e 1,3

d) 0,7 e 2,3

e) 0,7 e 3

Função logarítmica (páginas 38 a 42, Módulo 5)

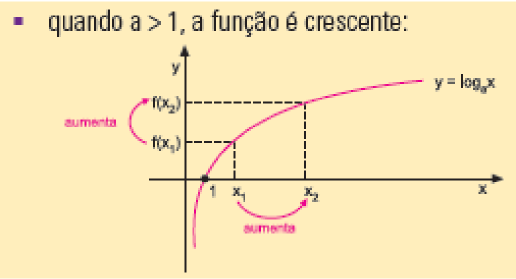
Função f : $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$,
com $0 < a \neq 1$
Ex.: $f(x) = \log_2 x$

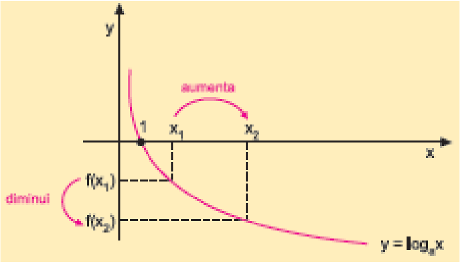


Equações logarítmicas

A incógnita aparece no logaritmando, na base ou em ambos.

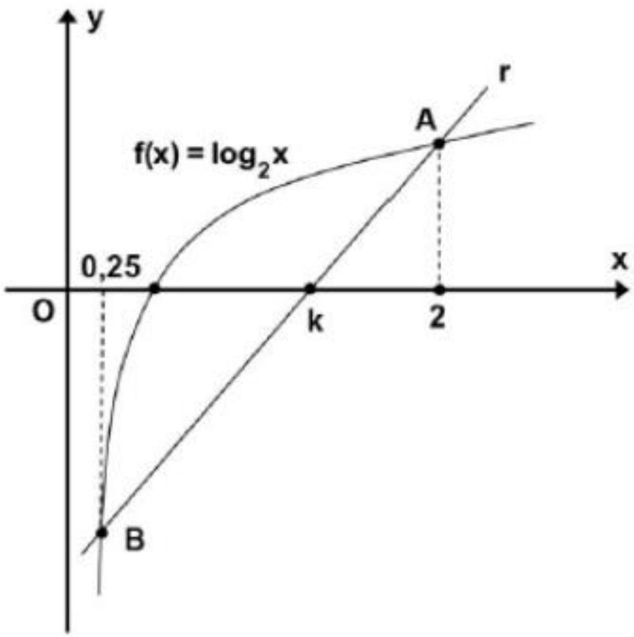
Funções logarítmicas





Atividade 6

(UFPR – 2016) Considere o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ e a reta r que passa pelos pontos A e B, como indicado na figura, sendo k a abscissa do ponto em que a reta r intersecta o eixo Ox. Qual é o valor de k?



a) $\frac{17}{12}$
b) $\frac{14}{11}$
c) $\frac{12}{7}$
d) $\frac{11}{9}$
e) $\frac{7}{4}$

Progressão aritmética (páginas 48 a 57, Módulo 5)

Sequências → **Progressão aritmética (PA)**

Possuem uma regularidade;
Podem ser numéricas, geométricas, entre outras;
Recursivas ou repetitivas, de forma que possuem uma lei de formação.

Ex. 1: (0, 2, 4, 6, 8, 10, ...)
Ex. 2: (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...)
Ex. 3: (1, 5, 9, 13, 17, ...)
Ex. 4: (10, 20, 30, 40, 50, ...)

Caso particular de sequências;
A regularidade é a **razão r**, sendo esse valor **adicionado** ao termo anterior;
Diferença entre termos consecutivos é a razão r;
Possuem uma lei de formação (**termo geral**);

- Crescentes: $\mathbf{r > 0}$;
- Decrescentes: $\mathbf{r < 0}$;
- Constantes: $\mathbf{r = 0}$.

Pode-se usar a notação para uma PA de três termos:
$\mathbf{(x - r, x, x + r)}$

Atividade 7

Um conjunto possui os termos seguindo uma progressão aritmética, de forma que três termos desse conjunto podem ser indicados por $(2x - 20, x, x + 5)$. Qual o valor:

a) de x para essa progressão?

b) da razão dessa progressão?

c) de cada um dos termos desse conjunto?

Progressão aritmética (páginas 58 a 62, Módulo 5)

Progressão aritmética

Termo geral

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Onde a_n é o termo geral, a_1 é o primeiro termo, n é o número de termos e r é a razão da PA.

Forma alternativa:

$$a_n = a_m + (n - m) \cdot r$$

Soma dos termos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Onde a_n é o termo geral, a_1 é o primeiro termo, n é o número de termos e S_n é a soma dos n primeiros termos.

Atividade 8

(ENEM – 2018) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina em uma fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1 380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8 000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é:

a) R$ 512 000,00 b) R$ 520 000,00 c) R$ 528 000,00
d) R$ 552 000,00 e) R$ 584 000,00

Progressão geométrica (páginas 64 a 69, Módulo 5)

Progressão geométrica (PG)

A regularidade é a **razão q**, sendo esse valor **multiplicado** pelo termo anterior;
Diferença entre termos consecutivos é a razão q;
Possuem uma lei de formação (**termo geral**);

- Crescentes: **r > 1**;
- Decrescentes: **0 < r < 1**;
- Constante: **r = 1**;
- Alternadas: **r < 0**.

Pode-se usar a notação para uma PG de três termos: (**x/q, x, x·q**).

Termo geral

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

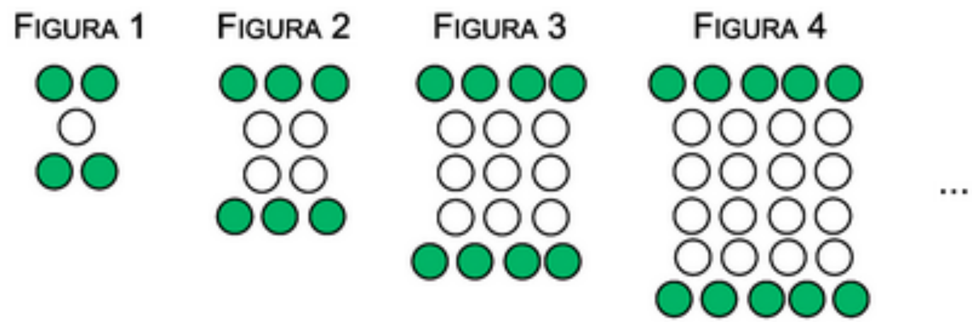
Onde a_n é o termo geral, a_1 é o primeiro termo, n é o número de termos e q é a razão da PG.

Forma alternativa:

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

Atividade 9

(FAMERP – 2020) Observe o padrão da sequência de figuras:



Mantido o padrão, a figura que terá a quantidade de bolas brancas superando a de bolas verdes em 286 será a de número:

a) 13 b) 18 c) 14 d) 16 e) 21

Progressão geométrica (páginas 70 a 71, Módulo 5)

Progressão geométrica (PG)

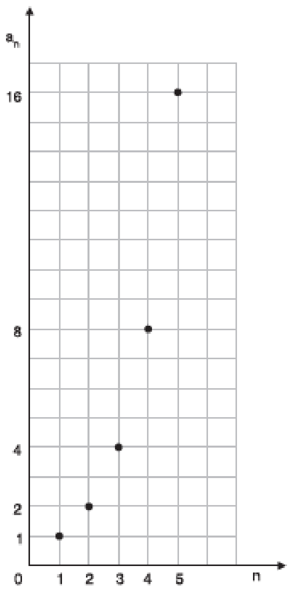
Interpolação geométrica

Inserir x meios geométricos,
a PG terá x + 2 termos.

Progressão geométrica e função exponencial

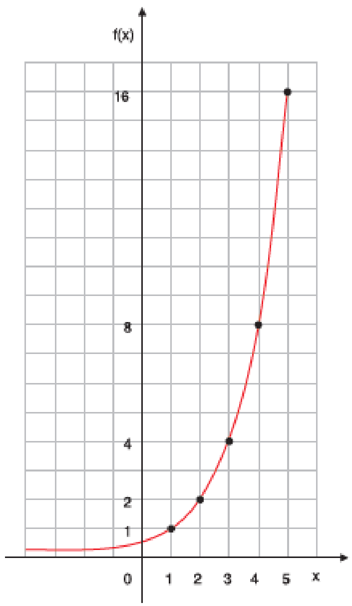
A PG é uma função exponencial com o domínio nos números inteiros positivos.

- Progressão geométrica



Domínio: $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$

- Função exponencial



Domínio: $\mathbb{R}$

Atividade 10

Uma progressão geométrica cujo primeiro termo é três e o termo de ordem 10 é 1536 tem oito meios geométricos. Qual a razão desta PG?

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

Progressão geométrica (páginas 72 a 75, Módulo 5)

Progressão geométrica (PG)

Soma dos termos de PG finita

$$S_n = \frac{(a_n \cdot q) - a_1}{q - 1} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Ex.: (2, 4, 8, 16, 32)

Soma dos termos de PG infinita

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, 0 < q < 1$$

Ex.: $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

Atividade 11

Uma notícia se espalha de tal forma que a cada dia dobra o número de pessoas que estão sendo informadas. Se no primeiro dia uma pessoa ficou sabendo do fato, no segundo dia ela falou para duas pessoas, no terceiro dia essas duas pessoas falaram para outras quatro pessoas, e assim por diante. Quantas pessoas já saberão dessa notícia ao final de 10 dias?

a) 511

b) 1023

c) 2047

d) 4095

Noções de matemática financeira (páginas 12 a 17, Módulo 6)

Juros simples

Juros incidem sempre sobre o capital inicial.

$M = J + C = C \cdot (1 + i \cdot n)$

C: capital inicial
i: taxa de juros
n: período de tempo
M = montante
J = juro

Juros compostos

Juros incidem sempre sobre o capital acumulado.

$M = J + C = C \cdot (1 + i)^n$

Atividade 12

(UNICAMP – 2015) Uma compra no valor de 1 000 reais será paga com uma entrada de 600 reais e uma mensalidade de 420 reais. A taxa de juros aplicada na mensalidade é igual a:

a) 2%

b) 5%

c) 8%

d) 10%

Noções de matemática financeira (páginas 18 a 26, Módulo 6)

Juros simples → Progressão aritmética

$M = C \cdot (1 + i \cdot n) = C + C \cdot i \cdot n$

Um capital de R$ 1 000,00 aplicado a uma taxa de 1%:

$a_1 = C = 1\,000$

$r = 1\,000 \cdot i = 1\,000 \cdot 0{,}01 = 10$

n = número de meses

Taxas equivalentes

Taxas que produzem montantes iguais em um mesmo tempo, sobre um mesmo capital. Por exemplo, comparação entre uma taxa mensal e anual.

$M = J + C = C \cdot (1 + i)^n$

Um capital de R$ 1 000,00 aplicado a uma taxa de 1%:

$a_1 = C = 1\,000$ $\quad$ $q = 1 + i = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$

n = número de meses

Juros compostos → Progressão geométrica

Atividade 13

Faça a equivalência entre as taxas:

a) 12% ao ano para taxa mensal.
b) 0,5% ao mês para taxa anual.
c) 1,2% ao trimestre para taxa anual.
d) 0,04% ao dia para taxa mensal.
e) 1,7% ao mês para taxa semestral.

Estatística I (páginas 27 a 30, Módulo 6)

Variáveis

Qualitativas
Quantitativas
Contínuas
Discretas

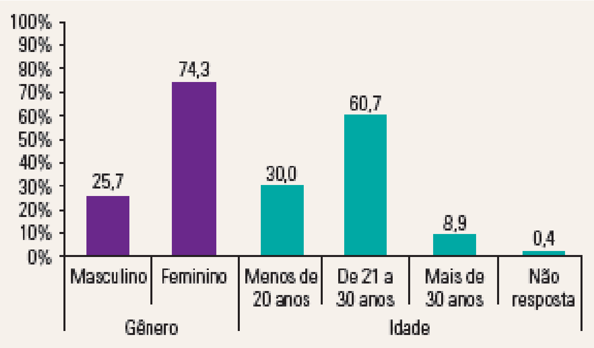


Gráfico 1 - Exemplo de amostragem em relação às variáveis qualitativas Gênero e Idade

Frequências

Absoluta (f_a): número de vezes que uma variável ocorre.

Relativa (f_r): quociente entre frequência absoluta e o total de dados da amostra:

$$f_r = \frac{f_a}{\text{total de dados da amostra}} \cdot 100$$

(em porcentagem)

Atividade 14

Foi realizada uma pesquisa com os alunos do Ensino Médio de uma escola, com a intenção de saber qual o esporte preferido de cada um deles, dentre futebol, basquete, vôlei e handebol. Veja a tabela com as frequências absolutas e preencha com as frequências relativas (em percentual).

ESPORTE	f_a	F_r (%)
Futebol	48	
Basquete	30	
Vôlei	39	
Handebol	33	
TOTAL	**150**	

Estatística I (páginas 30 a 32, Módulo 6)

Gráficos e tabelas

Gráfico de linhas

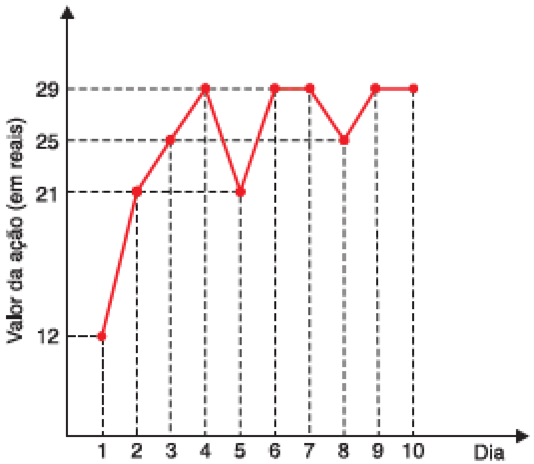
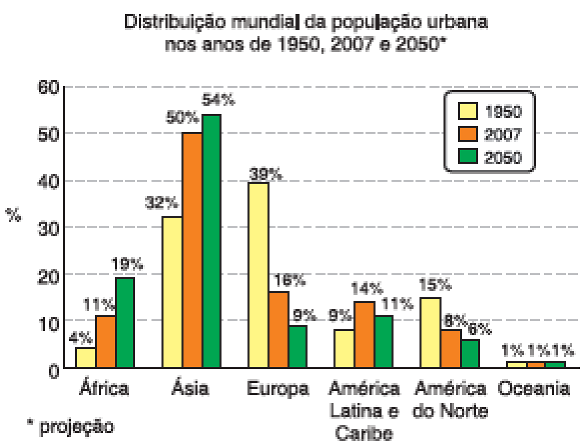
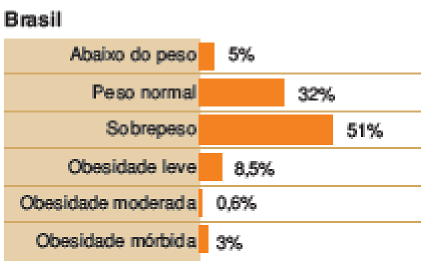


Gráfico de colunas



Fonte: ONU. *World Urbanization Prospects*. New York: ONU, 2008.

Gráfico de barras



Atividade 15

(ENEM – 2017) O gráfico mostra a expansão da base de assinantes de telefonia celular no Brasil, em milhões de unidades, no período de 2006 a 2011.

De acordo com o gráfico, a taxa de crescimento do número de aparelhos celulares no país, de 2007 para 2011, foi de:

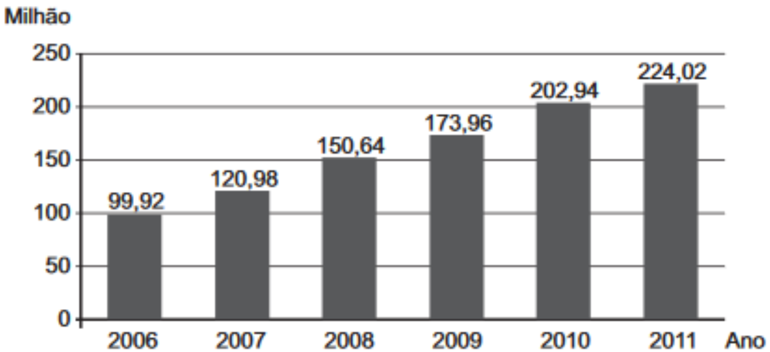
a) 8,53%

b) 85,17%

c) 103,04%

d) 185,17%

e) 345,00%



Disponível em: www.guiadocelular.com. Acesso em: 1 ago. 2012.

Estatística I (páginas 33 a 46, Módulo 6)

Medidas de tendência central

Média aritmética

Representação, em um único termo, das particularidades de um conjunto.

Média ponderada

Calcula a média, mas com um **agrupamento** de valores.

Média geométrica

Raiz n-ésima do produto dos n elementos do conjunto.

Mediana

Termo central de um conjunto de valores. O conjunto deve estar **ordenado.**

Moda

Termo que mais aparece, o termo de **maior frequência.**

Medidas de dispersão

Quanto maior dispersão, **menor** regularidade.

- Variância
- Desvio padrão

Atividade 16

(ENEM – 2019) Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega da sala. Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente:

a) basquete, basquete, basquete, basquete.

b) futebol, basquete, basquete, basquete.

c) futebol, futebol, basquete, basquete.

d) futebol, futebol, futebol, basquete.

e) futebol, futebol, futebol, futebol.

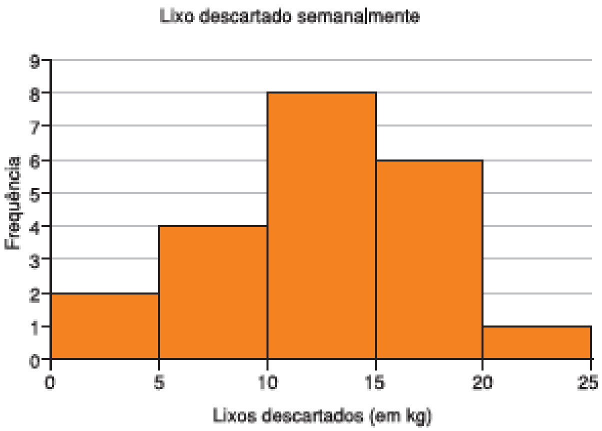
Estatística II (páginas 47 a 49, Módulo 6)

Distribuição de frequências por classes

Classes

- Intervalos de representação em uma tabela;
- As classes possuem mesmo tamanho;
- A amplitude da classe é a diferença entre o limite superior e inferior.

i	Lixo descartado (em kg)	f
1	0 ├── 5	2
2	5 ├── 10	4
3	10 ├── 15	8
4	15 ├── 20	6
5	20 ├── 25	1
Total		21



Histograma

Atividade 17

A tabela de distribuição de frequências abaixo representa o tempo em minutos por ligação de uma central de teleatendimento. Responda:

a) Qual a classe de tempo que mais aparece?

b) E a que menos aparece?

c) Qual a amplitude das classes?

i	Tempo de ligação (em min)	f
1	$0 \vdash 3$	20
2	$3 \vdash 6$	4
3	$6 \vdash 9$	8
4	$9 \vdash 12$	12
5	$12 \vdash 15$	12
6	$15 \vdash 18$	24
Total		80

Estatística II (páginas 50 a 51, Módulo 6)

Medidas de tendência central (classe)

Média

Deve-se calcular o ponto médio da classe:

$$x_i = \frac{\ell_i + L_i}{2}$$

Onde ℓ_i é o limite inferior da classe e L_i é o limite superior da classe.
A média é calculada utilizando-se esse ponto médio.

Mediana

50% dos valores estão acima da mediana e 50% dos valores estão abaixo da mediana.

Classe modal

Classe que possui maior frequência.

Atividade 18

Encontre a média, a mediana e a classe modal para o conjunto de valores apresentado na tabela.

i	Tempo de ligação (em min)	f
1	0 ├── 3	20
2	3 ├── 6	4
3	6 ├── 9	8
4	9 ├── 12	12
5	12 ├── 15	12
6	15 ├── 18	24
Total		80