#ConquistaNoEstudo ▪ Semana14▪ Etapa2

Ensino Médio ▪ 2ª Série

Matemática

Neste Guia, você vai estudar sobre permutações com repetições.

Pág. 14 do Módulo 8

Profª. Conceição Longo

Nós já estudamos problemas que tratavam da formação de anagramas de uma palavra cujas letras não eram repetidas, vamos recordar!

Quantos são os anagramas da palavra "AMOR"?

1ª letra	2ª letra	3ª letra	4ª letra
4 possibilidades de escolha	3 possibilidades de escolha	2 possibilidades de escolha	1 possibilidade de escolha
4	3	2	1

Pelo princípio multiplicativo, temos 4 . 3 . 2 . 1 = 4! = P_4 anagramas possíveis.

Agora, considere a palavra "TARTARUGA" para formar um anagrama; temos que considerar 3A, 2T, 2R, 1G e 1U em 9 lugares.

Permutar n elementos com alguns deles repetidos é calcular as n! possibilidades de troca e retirar os casos em que cada conjunto de elementos repetidos (x, y, z, ...) foi trocado sem alterar a sequência.

Retirar o total de vezes que se repete é dividir pelo fatorial da quantidade de cada letra que se repete.

Se as 9 letras fossem diferentes, teríamos $P_9 = 9!$ anagramas.

Como os “A” se repetem três vezes, contamos cada anagrama 3! vezes, logo, devemos dividir por 3!

Da mesma forma que temos 2 “T”, devemos dividir por 2!

E, 2 “R”, dividimos outra vez por 2!

Hum! Permutação de 9 letras, das quais 3 são iguais a A, 2 são iguais a T, 2 são iguais a R, 1 é a letra G e 1 a letra U, ou seja, 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 9.

Em símbolos:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

$$P_9^{3,2,2,1,1} = \frac{9!}{3!2!2!} = \frac{9.8.7.6.5.\cancel{4}.\cancel{3.2.1}}{\cancel{3.2.1}.\cancel{2.1.2.1}} = 15.120 \text{ anagramas}$$

Exemplo: Eduardo possui 4 bolas amarelas, 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 bola verde, e quer colocá-las em um tubo translúcido e incolor, onde elas ficarão umas sobre as outras na vertical. De quantas maneiras distintas Eduardo poderá formar esta coluna de bolas?

Neste caso de permutação com elementos repetidos, temos um total de 10 bolas de 4 cores diferentes. Segundo a repetição das cores, devemos calcular:

$$P_{10}^{4,3,2} = \frac{10!}{4!\,3!\,2!} = \frac{10.9.8.7.\cancel{6}.5.\cancel{4.3.2.1}}{\cancel{4.3.2.1}.\cancel{3.2}.1.2.1} = \frac{25.200}{2} = 12.600$$

Eduardo poderá formar esta coluna de bolas de 12.600 maneiras diferentes.

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

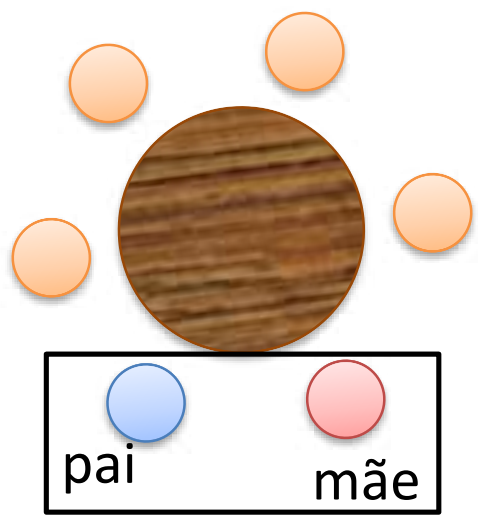
Na matemática, **permutação circular** é um tipo de permutação composto por um ou mais conjuntos em ordem cíclica. Ocorre quando temos grupos com m elementos distintos formando uma circunferência.

É definida pela fórmula $PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$

Para se entender melhor a permutação circular, considere a seguinte afirmação:

Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Em um restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

Sabendo que os pais estarão sempre juntos, podemos tratá-los como um único elemento.



Ao tratar o pai e mãe como um único elemento, passamos a ter somente 5 elementos.

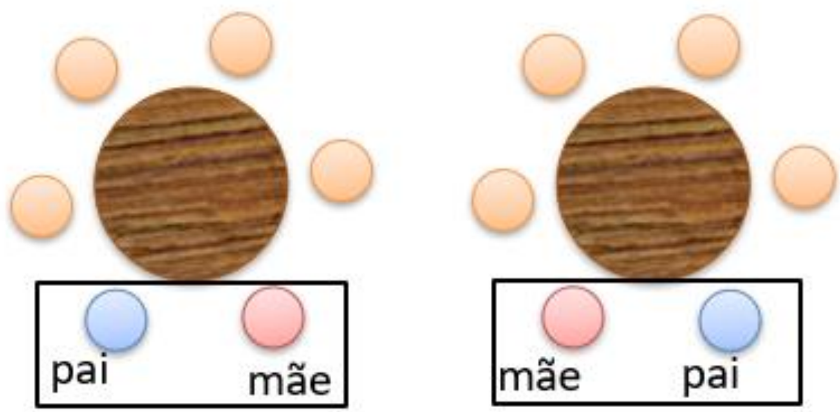
Portanto, utilizando a permutação circular de 5 elementos, calculando o número de possibilidades desta família sentar-se ao redor da mesa com **pai e mãe** juntos, sendo que o **pai está à esquerda da mãe**.

$$PC_n = (n-1)! = (5-1)! = 4! = 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 24$$

Portanto, para o pai ficar à esquerda da mãe, temos 24 posições diferentes.

Mas o pai pode estar à direita da mãe?

Bem pensado! Sim, pode. Veja a figura a seguir.



Então, teremos mais 24 posições diferentes para contar. Portanto, o número total de disposições é 48.

Pratique!

1. Quantos são os anagramas da palavra “ARARA”? R: 10 anagramas

2. Quantos anagramas da palavra “CAMARADA” começam com A? R: 840 anagramas

3. Quantos anagramas podem ser formados com a palavra “MATEMÁTICA”? R: 302.400 anagramas

4. Em um torneio de futsal, um time obteve 8 vitórias, 5 empates e 2 derrotas, nas 15 partidas disputadas. De quantas maneiras distintas esses resultados podem ter ocorrido? R: 135.135 maneiras distintas

5. Considerando uma mesa de jantar circular e um total de 4 pessoas, de quantas maneiras diferentes é possível acomodar essas 4 pessoas sem que as posições se repitam? R: 6 maneiras

6. Considerando uma mesa de experimentos circular e um total de 10 cientistas, de quantas formas diferentes é possível acomodar esses cientistas sem repetir as posições? R: 362.880 maneiras

RESUMINDO!

$$P_n = n! \rightarrow \text{permutação simples}$$

$$P_c(m) = (n-1)! \rightarrow \text{permutação circular}$$

$$P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_r)} = \frac{n!}{n_1!\ n_2! \ldots n_r!} \rightarrow \text{permutação com elementos repetidos}$$