#ConquistaNoEstudo ▪ Semana9▪ Etapa2

Ensino Médio ▪ 3ª Série

Matemática

Neste Guia você vai estudar sobre a multiplicidade de uma raiz.

Pág. 51 a 53 do Módulo 11

Profª. Conceição Longo

Multiplicidade de uma raiz

As raízes de uma equação algébrica podem ser todas distintas ou não.

Se um número a for uma só vez raiz de uma equação algébrica, ele será chamado **raiz simples**.

Se uma equação algébrica tiver **duas raízes iguais** a um certo número, esse número será uma **raiz de multiplicidade 2**, isto é, será uma **raiz dupla**; se tiver **três raízes iguais**, o número será uma **raiz de multiplicidade 3**, isto é, será uma **raiz tripla**, e assim sucessivamente.

Seja a equação algébrica:

$$(x - 2)^2 . (x + 1)^3 . (x - 3) = 0,$$

que pode ser colocada na forma:

$$(x - 2)(x - 2)(x + 1)(x + 1)(x + 1)(x - 3) = 0.$$

Podemos observar que a equação tem 6 raízes:

uma raiz dupla igual a 2;

uma raiz tripla igual a -1;

e uma raiz simples igual a 3.

De uma maneira geral, se um polinômio P(x) é tal que:

$$P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q(x)$$

com $Q(\alpha) \neq 0$, dizemos que α é raiz de multiplicidade ***m*** da equação P(x) = 0.

OBSERVAÇÃO: Toda equação algébrica, cujo termo independente é zero, admite o número zero como raiz de multiplicidade igual ao menor expoente da incógnita.

Exemplo:

$x^3 - 4x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 5) = 0 \Rightarrow$ **uma raiz nula.**

Exemplos

a) Vamos resolver a equação $x^5 + 10x^4 - 6x^3 - 176x^2 + 133x + 294 = 0$, em $\mathbb{C}$, sendo -7 raiz dupla e 2 raiz de multiplicidade 1 (ou raiz simples) dessa equação.

Como -7 é raiz dupla e 2 é raiz simples da equação $P(x) = 0$, o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x + 7)^2 \cdot (x - 2)$.

Em seguida, aplicamos o dispositivo de Briot-Ruffini para obter o quociente $Q(x)$ e uma equação de grau menor e de fácil resolução.

–7	1	10	–6	–176	133	294
–7	1	3	–27	13	42	0
2	1	–4	1	6	0	
	1	–2	–3	0		

Assim, encontramos $x^2 - 2x - 3 = 0$, cujas raízes são -1 e 3.

As raízes –1 e 3 também são raízes da equação $P(x) = 0$.

Logo, o conjunto solução $S = \{-7, 2, -1, 3\}$.

b) Considere o polinômio $P(x) = x^4 + x^3 - Ax^2 - Bx - C$, calcule os valores de A, B e C, dado que -1 é uma raiz tripla ou raiz de multiplicidade 3.

Sabemos que -1 é uma raiz tripla da equação P(x) = 0, pelo Teorema de D'Alembert, temos que P(x) é divisível por $(x + 1)^3$.

Teorema de D'Alembert

Para que um polinômio P(x) seja divisível por um polinômio do tipo (x – a), é preciso que o resto seja igual a zero, ou seja, P(a) = 0.

P(x) é divisível por (x – a) ⇒ P(a) = 0

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

–1	1	1	–A	–B	–C
–1	1	0	–A	A – B	–A + B – C
–1	1	–1	1 – A	–1 + 2A – B	
	1	–2	3 – A		

Igualando a zero os restos encontrados, temos:

$$\begin{cases} -A + B - C = 0 \\ -1 + 2A - B = 0 \\ 3 - A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = B - A \\ B = 2A - 1 \\ A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = B - A \\ B = 5 \\ A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2 \\ B = 5 \\ A = 3 \end{cases}$$

Portanto, A = 3; B = 5 e C = 2.

c) Temos que 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Calcule $a^2 - b^3$.

Primeiro, aplicamos o dispositivo de Briot-Ruffini.

1	1	0	1	a	b
1	1	1	2	$a+2$	$a+b+2$
	1	2	4	$a+6$	

E encontramos: $\begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ a + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 + b + 2 = 0 \\ a = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -6 \end{cases}$

$$a^2 - b^3 = (-6)^2 - 4^3 = 36 - 64 = -28$$

d) Qual a multiplicidade da raiz 2 do polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$?

Primeiro, encontramos quantas divisões sucessivas por (x – 2) cujo resto é nulo são possíveis usando o dispositivo de Briot-Ruffini.

2	1	-5	6	4	-8
2	1	-3	0	4	0
2	1	-1	-2	0	
2	1	1	0		
	1	3			

divisível por $(x - 2)^3$

3 → não é divisível por $(x - 2)^4$

coeficientes de Q(x)

Portanto, $\boldsymbol{P(x) = (x-2)^3 . Q(x)}$. Logo, $\mathbf{2}$ é uma raiz **tripla** ou de **multiplicidade 3**.

#IrAlém

- Amplie seus conhecimentos teóricos

<http://clubes.obmep.org.br/blog/teorema-fundamental-da-aritmetica/>

<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/176342/2/Fundamentos%20da%20Matem%C3%A1tica%20II.pdf>