#CONQUISTANOESTUDO ▪ SEMANA8▪ ETAPA2

ENSINO MÉDIO ▪ 3ª SÉRIE

MATEMÁTICA

Neste Guia você vai estudar sobre o teorema fundamental da álgebra.

Pág. 51 do Módulo 11

Profª. Conceição Longo

Retomando: conceitos iniciais

Denomina-se **equação polinomial** ou **equação algébrica** de grau ***n***, na variável x e C, toda equação que pode ser reduzida à forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

Nessa igualdade, temos a_n, a_{n-1}, ... , a_2, a_1 e a_0 números complexos chamados coeficientes; $n \in$ IN*; $a_n \neq 0$ e a_0 é o termo independente.

Exemplos:

$2x - 3 = 0$ é uma equação algébrica do 1º grau.

$x^2 - 2x + 10 = 0$ é uma equação algébrica do 2º grau.

$2x^3 + 5x^2 - \sqrt{3}\,x + 1 = 0$ é uma equação algébrica do 3º grau.

$x^5 - \frac{1}{3} 3x^4 + 2x - 8 = 0$ é uma equação algébrica do 5º grau.

Raiz ou zero de uma equação

Denominamos raiz ou zero de uma equação polinomial $P(x) = 0$ todo número complexo α para o qual $P(\alpha) = 0$ é uma sentença verdadeira.

$$\alpha \text{ é raiz de } P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

Na equação algébrica $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$, por exemplo, temos:

2 é raiz da equação, pois:

$$(2)^3 + 2 \cdot (2)^2 - 13 \cdot (2) + 10 = 0$$

-2 não é raiz da equação, pois:

$$(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 13 \cdot (-2) + 10 = 36 \neq 0$$

Conjunto solução

O conjunto solução, ou conjunto verdade, em um certo conjunto universo *U*, é o conjunto das raízes da equação algébrica que pertencem a *U*.

Quando não citarmos o conjunto universo de uma equação algébrica, estaremos considerando-o como sendo o conjunto dos números complexos.

Resolver uma equação algébrica é encontrar o seu conjunto solução ou conjunto verdade.

Teorema fundamental da álgebra

Nas equações do 1º e do 2º grau, os zeros ou raízes são obtidos por fórmulas que envolvem os coeficientes das equações, as operações fundamentais e a extração de raízes.

- ✓ ax + b = 0 com a ≠ 0 é uma equação do 1º grau cuja raíz é: $-\frac{b}{a}$

$$S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

- ✓ ax² + bx + c = 0 com a ≠ 0 é uma equação do 2º grau cujas raízes são:

$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$S = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

Teorema fundamental da álgebra

Para a resolução de equações de grau igual ou maior que 3, utilizamos métodos baseados no teorema fundamental da álgebra, enunciado abaixo:

Toda equação algébrica $P(x) = 0$, de grau n ($n \geq 1$), tem pelo menos uma raiz real ou complexa.

Teorema da decomposição

Observe os polinômios a seguir e as suas raízes:

$P_1(x) = 2x - 12$ de raiz 6

$P_2(x) = x^2 - 5x + 6$ de raízes 2 e 3

$P_3(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ de raízes -2, -1 e 2

$P_4(x) = x^4 - 5x^2 - 36$ de raízes -3, 3, $2i$ e $-2i$

Cada um dos polinômios acima pode ser escrito nas seguintes formas fatoradas:

$P_1(x) = 2x - 12 \Rightarrow \mathbf{P_1(x) = 2(x - 6)}$

$P_2(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow \mathbf{P_2(x) = (x - 2)(x - 3)}$

$P_3(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Rightarrow \mathbf{P_3(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)}$

$P_4(x) = x^4 - 5x - 36 \Rightarrow \mathbf{P_4(x) = (x - 3)(x + 3)(x - 2i)(x + 2i)}$

De maneira geral, todo polinômio

$$\mathbf{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

pode ser escrito na forma fatorada:

$$\mathbf{P(x) = a_n(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\ \ldots\ (x - \alpha_n)}$$

em que α_1, α_2 ...,α_n são as raízes de P(x).

Daí, podemos enunciar o seguinte teorema:

Toda equação polinomial P(x) = 0, de grau n, n$\geq$1, tem exatamente n raízes reais ou complexas.

A forma fatorada de P(x) = an$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$ mostra que o conjunto solução da equação P(x) = 0 tem no máximo *n* elementos, pois não sabemos se os números α_1, α_2, α_3, ..., α_n são todos distintos dois a dois. Considerando que a ordem dos fatores não altera o produto, essa decomposição é única.

Decomposição do polinômio $P(x) = x^2 + 1$

Sabemos que i é raiz do polinômio $P(x) = x^2 + 1$, pois $P(i) = 0$.

Como i é raiz de $P(x)$, temos, pelo teorema de D'Alembert, que $P(x)$ é divisível por $(x - i)$. Portanto, $P(x)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$P(x) = Q(x)(x - i)$.

Ao dividir $P(x)$ por $(x - i)$, utilizando o método de Briot-Ruffini, temos:

i	1	0	1
	1	i	0

Logo: $Q(x) = x + i$

A raiz do quociente $Q(x) = x + i$ também é raiz de $P(x)$.

Portanto, podemos escrever $P(x)$ na forma fatorada:

$P(x) = (x - i)(x + i)$

Decomposição do polinômio $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$

Vamos decompor o polinômio $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$, sabendo que -2 é uma de suas raízes.

Se -2 é raiz de $P(x)$, por D'Alembert, temos: $P(x) = Q(x)(x + 2)$.

E, pelo método de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 2 & -6 & -12 & 16 \\ \hline & 2 & -10 & 8 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - 10x + 8$

As raízes do quociente $Q(x) = 2x^2 - 10x + 8$ também são raízes de $P(x)$.

Agora, vamos resolver a equação pela fórmula de Bhaskara:

$2x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow a = 2;\ b = -10;\ c = 8$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 100 - 64 = 36$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2.2} = \frac{10 \pm 6}{4}$

$x = 4$ ou $x = 1$

Portanto, as raízes de $Q(x) = 2x^2 - 10x + 8$ são 1 e 4.

Logo: $Q(x) = 2(x - 1)(x - 4)$.

Assim: $P(x) = 2(x - 1)(x - 4)(x + 2)$.

#IrAlém

- Amplie seus conhecimentos teóricos

<http://clubes.obmep.org.br/blog/teorema-fundamental-da-aritmetica/>